Homogeneous 型空間上の重み付きBMOについて (解析・調和関数空間の構造とその上の作用素論)

中井, 英一

数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 141-151

Homogeneous 型空間上の重み付き BMO について

大阪教育大学 中井英一 (Eiichi Nakai)

1 はじめに

Homogeneous 型空間上の重み付き BMO の性質として, pointwise multiplier の特徴付けと, 函数の連続性について述べる。

任意の $f \in L^{p_1}(X)$ に対して $fg \in L^{p_2}(X)$ であるような函数 g を $L^{p_1}(X)$ から $L^{p_2}(X)$ への pointwise multiplier とよぶ。$L^{p_1}(X)$ から $L^{p_2}(X)$ への pointwise multiplier の全体を $PWM(L^{p_1}(X), L^{p_2}(X))$ と書くことにする。X が σ-有限な測度空間で, $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2$ のとき, g が $L^{p_1}(X)$ から $L^{p_2}(X)$ への pointwise multiplier であることと, $g \in L^{p_3}(X)$ は同値である。すなわち

$$PWM(L^{p_1}(X), L^{p_2}(X)) = L^{p_3}(X).$$

ここでは, 重み付きの BMO についてのこのような pointwise multiplier の特徴づけを考える。

次に, $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ 函数の連続性や, Lipschitz 函数との関係について述べる。これにより, pointwise multiplier の連続性の判定や, Lipschitz 空間上の pointwise multiplier の特徴付けもできる。

$X = (X, d, \mu)$ を Coifman-Weiss の homogeneous 型空間とする。すなわち d は擬距離, μ はボレル測度で

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le K_1\,(d(x,z) + d(z,y)), \qquad x,y,z \in X, \\ 0 < \mu(B(x,2r)) &\le K_2\,\mu(B(x,r)) < \infty, \qquad x \in X,\ r > 0 \end{aligned}$$

を満たすものとし,

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le K_3\,(d(x,z) + d(y,z))^{1-\alpha} d(x,y)^{\alpha}, \qquad x,y,z \in X$$

を仮定する。ただし, $B(x,r)$ は中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の球, $K_i > 0$ $(i = 1,2,3)$, $0 < \alpha \le 1$ は $x,y,z \in X$, $r > 0$ に依らない定数とする。

結果はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に限っても新しいものである。

$1 \le p < \infty$, $\phi(x,r) : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ とし, $B = B(x,r)$ に対して $\phi(B) = \phi(x,r)$ と

する。$f_B=\mu(B)^{-1}\int_B f(x)\,d\mu$ として

$$\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)=\left\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(X):\sup_B\frac{1}{\phi(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(x)-f_B|^p\,d\mu\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}}=\sup_B\frac{1}{\phi(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(x)-f_B|^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}=\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}}+|f_{B(x_0,1)}|\quad\text{for fixed } x_0\in X$$

と定義する。また $\mathrm{bmo}_\phi(X)=\mathrm{bmo}_{\phi,1}(X)$, $\mathrm{bmo}(X)=\mathrm{bmo}_\phi(X)$ for $\phi=1$ とする。$x_1\in X$ に対して, $\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}$ は $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}}+|f_{B(x_1,1)}|$ と同値である。特に, $\mu(X)<+\infty$ ならば, $\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}$ は $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}}+\|f\|_{L^p}$ と同値である。

$\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ は $\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}$ をノルムとして Banach 空間になる。したがって $\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X)$ から $\mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)$ への pointwise multiplier は, 閉グラフ定理により有界作用素になる。一般に BMO は定数を法とした空間として扱うが, pointwise multiplier は関数または null-function を法とした元に対して定義する。このためノルムは $\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}$ を用い, 空間を表す記号も $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ を使う。

また,

$$L_{\phi,p}(X)=\left\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(X):\sup_B\frac{1}{\phi(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{L_{\phi,p}}=\sup_B\frac{1}{\phi(B)}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

と定義する。 $L_\phi(X)=L_{\phi,1}(X)$ とする。

さらに

$$\Lambda_\phi(X)=\left\{f:\sup_{x,y\in X}\frac{2|f(x)-f(y)|}{\phi(x,d(x,y))+\phi(y,d(y,x))}<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{\Lambda_\phi}=\sup_{x,y\in X}\frac{2|f(x)-f(y)|}{\phi(x,d(x,y))+\phi(y,d(y,x))}$$

と定義する。$\phi(x,r)=r^\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ のとき, $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(\mathbb{R}^n)=\Lambda_\phi(\mathbb{R}^n)=\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ である。

ϕ について次の条件を考える。

$$\frac{1}{A_1}\le\frac{\phi(a,s)}{\phi(a,r)}\le A_1,\qquad \frac{1}{2}\le\frac{s}{r}\le 2,\tag{1}$$

$$\frac{\phi(a,r)}{r^\alpha}\le A_2\frac{\phi(a,s)}{s^\alpha}\qquad 0<s<r,\tag{2}$$

$$\int_0^r\mu(B(a,t))^{1/p}\frac{\phi(a,t)}{t}\,dt\le A_3\,\mu(B(a,r))^{1/p}\phi(a,r),\qquad r>0,\tag{3}$$

$$\frac{1}{A_4}\le\frac{\phi(a,r)}{\phi(b,r)}\le A_4,\qquad d(a,b)\le r,\tag{4}$$

ただし $A_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ は $r, s > 0$, $a, b \in X$ に依らない定数とする。また,

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \phi(B_1) \le A_5 \phi(B_2) \tag{5}$$

ならば John-Nirenberg の不等式により $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X) = \mathrm{bmo}_\phi(X)$ for $1 < p < \infty$.

2 Pointwise multipliers

2.1 定理

$\mu(X) = +\infty$ のときは次を条件を考える。

$$B(x_0, K_4 r) \setminus B(x_0, r) \ne \emptyset, \qquad r > R_0, \tag{6}$$

$$\int_{R_0}^{r} \mu(B(x_0,t)) \frac{\phi(x_0,t)^p}{t}\, dt \le A_6 \mu(B(x_0,r)) \phi(x_0,r)^p, \quad r > R_0. \tag{7}$$

ただし $R_0 \ge 0, K_4 > 1, A_6 > 0$ は r に依らない定数とする。(6) は

$$\mu(B(x_0,r)) \le \frac{1}{2} \mu(B(x_0, K_5 r)), \qquad r > R_0 \tag{8}$$

と同値である。また $\phi(x_0,r) = 1$ のとき (6) と (7) は同値である。さらに (6) のもとで,

$$\mu(B(x_0,r))\phi(x_0,r)^{p+\varepsilon'} \le A_7 \mu(B(x_0,s))\phi(x_0,s)^{p+\varepsilon'}, \quad R_0 < r < s. \tag{9}$$

ならば (7) を満たす。

ϕ_i $(i = 1, 2, 3)$ に対して

$$\Phi_i^*(a,r) = \int_1^{\max(2,d(x_0,a),r)} \frac{\phi_i(x_0,t)}{t}\, dt, \ \Phi_i^{**}(a,r) = \int_r^{\max(2,d(x_0,a),r)} \frac{\phi_i(a,t)}{t}\, dt$$

とおく。

Theorem 1 ϕ_1 はある p_1 に対して *(1)〜(5)* を, ϕ_2 は *(1),(4),(5)* をそれぞれ満たし, $(\Phi_2^* + \Phi_2^{**})/\phi_2 \le C(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})/\phi_1$ とする。$\mu(X) = +\infty$ のときは *(6)* および $\phi = \phi_2/\phi_1$, $p = 1 + \varepsilon$ に対して *(7)* を仮定する。$\phi_3 = \phi_2/(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})$ とすると

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}$ と同値である。

Corollary 1 さらに $\Phi_3^* + \Phi_3^{**} \le C\phi_2/\phi_1$ ならば,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_3}}$ と同値である。

Corollary 2 $\mu(X) < +\infty$ とする。ϕ_1 はある p_1 に対して *(1)*〜*(5)* を, ϕ_2 は *(1)*,*(4)*,*(5)* を, ϕ_1/ϕ_2 は *(5)* をそれぞれ満たすならば,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}$ と同値である。

Corollary 3 *Corollary 2* と同じ仮定のもとでさらに $\Phi_3^{**} \leq C\phi_2/\phi_1$ $(r < 1)$ ならば,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_3}}$ と同値である。

Corollary 4 *Corollary 2* と同じ仮定のもとでさらに $\Phi_1^{**} \leq C$ $(r < 1)$ ならば,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_2}}$ と同値である。

Theorem 2 $1 < p_2 < p_1 < \infty$, $p_1p_2 \geq p_1 + p_2$. とする。ϕ_1, p_1 は *(1)*〜*(4)* を, ϕ_2 は *(1)*,*(4)* をそれぞれ満たし, $(\Phi_2^*+\Phi_2^{**})/\phi_2 \leq C(\Phi_1^*+\Phi_1^{**})/\phi_1$ とする。$\mu(X) = +\infty$ のときは *(6)* および $\phi = \phi_2/\phi_1$, $p = p_1/(p_1-1)$ に対して *(7)* を仮定する。$\phi_3 = \phi_2/(\Phi_1^*+\Phi_1^{**})$ が *(5)* を満たせば

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}$ と同値である。

Corollary 5 さらに $\Phi_3^* + \Phi_3^{**} \leq C\phi_2/\phi_1$ ならば,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_3}}$ と同値である。

Theorem 3 $1 \leq p_2 \leq p_1 < \infty$ とする。ϕ_1, p_1 は *(1)*〜*(4)* を満たし, $C^{-1} \leq \phi_1/\phi_2 \leq C$ とする。$\mu(X) = +\infty$ のときは *(6)* を仮定する。$\phi_3 = \phi_2/(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) = \mathrm{bmo}_{\phi_3,p_2}(X) \cap L^\infty(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3,p_2}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値である。

Corollary 6 (Nakai and Yabuta [7]) ϕ, p は *(1)*〜*(4)* を満たし, $\mu(X) = +\infty$ のときは *(6)* を仮定する。$\psi = \phi/(\Phi^* + \Phi^{**})$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X), \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)) = \mathrm{bmo}_{\psi,p}(X) \cap L^\infty(X).$$

また, $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X), \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\psi,p}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値である。

Theorem 4 $1 \leq p_i < \infty$, $\phi_i(x,r) = \phi_i(r)$ $(i = 1,2)$ とする。ϕ_1 が *(1)*〜*(3)* を, ϕ_2 が *(1)* をそれぞれ満たすとき, $\phi_2(r)/\phi_1(r) \to 0$ $(r \to 0)$ ならば

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) = \{0\}.$$

2.2 例

始めに, Theorem 1 および その Corollary の例。

$X=\mathbb{T}^n$ の場合。$0\le\beta_2<\beta_1<1$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-\beta_1}}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-\beta_2}}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_1-\beta_2-1}}(\mathbb{T}^n).$$

特に

$$PWM(\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-1/2}}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-1/2}}(\mathbb{T}^n).$$

また

$$PWM(\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}_{(\log\log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n),$$

$$\begin{aligned}&PWM(\mathrm{bmo}_{(\log\log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n))\\&\qquad=\mathrm{bmo}_{(\mathrm{li}(\log(1/r)))^{-1}}(\mathbb{T}^n)\cap L_{(\log\log(1/r))}(\mathbb{T}^n),\end{aligned}$$

ただし $\mathrm{li}(r)=\int_e^r 1/(\log t)\,dt,$

$$PWM(\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n)\cap L^\infty(\mathbb{T}^n). \tag{10}$$

さらに $\beta>1$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{-\beta}}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n).$$

$0<\beta_2\le\beta_1\le 1$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{r^{\beta_1}}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}_{r^{\beta_2}}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}_{r^{\beta_2}}(\mathbb{T}^n).$$

このとき $\mathrm{bmo}_{r^\beta}(\mathbb{T}^n)=\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{T}^n)$.

$X=\mathbb{R}^n$ の場合。

$$PWM(\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n),\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n))=\mathrm{bmo}_{(\log(|a|+r+1/r))^{-1}}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{11}$$

$0<\beta_2<\beta_1\le 1$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{r^{\beta_1}}(\mathbb{R}^n),\mathrm{bmo}_{r^{\beta_2}}(\mathbb{R}^n))=\mathrm{bmo}_{\frac{r^{\beta_2}}{(2+|a|+r)^{\beta_1}}}(\mathbb{R}^n)\cap L_{r^{\beta_2-\beta_1}}(\mathbb{R}^n).$$

また $0<\beta_1,\beta_2\le 1$ のとき

$$\begin{aligned}&PWM(\mathrm{bmo}_{(2+|a|+r)^{\beta_1}}(\mathbb{R}^n),\mathrm{bmo}_{(2+|a|+r)^{\beta_2}}(\mathbb{R}^n))\\&\qquad=\mathrm{bmo}_{\frac{(2+|a|+r)^{\beta_2-\beta_1}}{\log(|a|+r+1/r)}}(\mathbb{R}^n)\cap L_{(2+|a|+r)^{\beta_2-\beta_1}}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

以上において (10) は Janson [2] の結果, (11) は Nakai and Yabuta [6] の結果である。

Theorem 2 およびその Corollary の例。

$-1<\beta_1<\beta_2\le\beta_1+1,\ 1<p_2<p_1<\infty,\ p_1p_2\ge p_1+p_2.$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_1},p_1}(\mathbb{T}^n),\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_2},p_2}(\mathbb{T}^n))=\mathrm{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_2-\beta_1-1}}(\mathbb{T}^n).$$

$1<p<\infty$ のとき

$$PWM(\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n),\mathrm{bmo}_{\log(|a|+r+1/r),p}(\mathbb{R}^n))=\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n).$$

2.3 定理の証明

まず, 次の Lemmas が成り立つ。

Lemma 1 (Nakai and Yabuta [7]) ϕ, p が *(1)〜(4)* を満たすとき,

$$f_a(x) = \int_{d(a,x)}^{1} \frac{\phi(a,t)}{t}\, dt$$

とおくと, $f_a \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ であり, $\exists C > 0$, $\forall a \in X$ *s.t.* $\|f_a\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}} \le C$.

Lemma 2 $\exists C > 0$, $\forall f \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$, $\forall B$ *s.t.*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \le C\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}(\Phi^*(B) + \Phi^{**}(B)).$$

Lemma 3 $\exists C_i > 0$ $(i = 1,2,3)$, $\forall B$, $\exists f \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$, $\exists E \subset B$ *s.t.*

$$f(x) \ge C_1(\Phi^*(B) + \Phi^{**}(B)), \quad x \in E,$$
$$\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}} \le C_2, \qquad \mu(E) \ge C_3\mu(B).$$

ここで E は B と中心が同じ球かまたは円環領域とすることができる。

この Lemma は Lemma 1 の f_a を用いて証明する。

Lemma 4 $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2$, $f \in \mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X)$, $g \in L_{\phi_2/\phi_1,p_3}$ ならば,

$$fg \in \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X) \iff \sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B|^{p_2}\, d\mu\right)^{1/p_2} < \infty.$$

このとき

$$\left| \|fg\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}} - \sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B|^{p_2}\, d\mu\right)^{1/p_2} \right|$$
$$\le C\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}} \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_3}}.$$

Theorem 1 の証明。まず $1 < p_2 \le 1 + \varepsilon$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ として, Hölder の不等式と John-Nirenberg の不等式により

$$\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X) = \mathrm{bmo}_{\phi_1}(X), \quad \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X) = \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X),$$
$$C^{-1} \le \|g\|_{Op(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X),\mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))} / \|g\|_{Op(\mathrm{bmo}_{\phi_1}(X),\mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))} \le C$$

であることに注意する。第 1 に,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) \subset L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X) \tag{12}$$

を示す。$g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))$ とする。$f \in \mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X)$ に対して $fg \in \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)$ だから Lemma 2 より

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |fg(x)|^{p_2}\,d\mu\right)^{1/p_2} \le C\|fg\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}}(\Phi_2^*(B)+\Phi_2^{**}(B))$$
$$\le C\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}}\|g\|_{Op}(\Phi_2^*(B)+\Phi_2^{**}(B)).$$

一方 Lemma 3 より

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |fg(x)|^{p_2}\,d\mu\right)^{1/p_2} \ge C\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E |g(x)|^{p_2}\,d\mu\right)^{1/p_2}(\Phi_1^*(B)+\Phi_1^{**}(B))$$

かつ $\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}} \le C$ とできる。これより (7) と

$$\frac{\Phi_2^*(B)+\Phi_2^{**}(B)}{\Phi_1^*(B)+\Phi_1^{**}(B)} \le C\frac{\phi_2(B)}{\phi_1(B)}$$

を用い,

$$\left(\frac{1}{\mu(B')}\int_{B'} |g(x)|^{p_2}\,d\mu\right)^{1/p_2} \le C\frac{\phi_2(B)}{\phi_1(B)}\|g\|_{Op} \le C\frac{\phi_2(B')}{\phi_1(B')}\|g\|_{Op}.$$

よって

$$\|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}} \le C\|g\|_{Op}.$$

第 2 に,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) \subset \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X) \tag{13}$$

を示す。$g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X))$ とする。$f \in \mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X)$, $g \in L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X)$ に対して $fg \in \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)$ だから Lemma 4 より

$$\sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)}\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g(x)-g_B|\,d\mu < \infty.$$

Lemma 3 より $\forall B$, $\exists f \in \mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X)$ s.t.

$$|f_B| \ge C(\Phi_1^*(B)+\Phi_1^{**}(B)), \quad \|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}} \le C.$$

Lemma 4 の不等式より

$$\sup_B \frac{\Phi_1^*(B)+\Phi_1^{**}(B)}{\phi_2(B)}\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g(x)-g_B|\,d\mu$$
$$\le C(\|fg\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_2}} + \|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}}\|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}})$$
$$\le C(\|g\|_{Op} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}}) \le C\|g\|_{Op}.$$

よって

$$\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}} \le C\|g\|_{Op}.$$

第 3 に,

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) \supset \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X) \tag{14}$$

を示す。$g \in \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X)$ とする。$f \in \mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}$ に対して, Lemma 2 より

$$\begin{aligned}
&\sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B|\, d\mu \\
&\qquad \le C\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}} \sup_B \frac{\Phi_1^*(B) + \Phi_1^{**}(B)}{\phi_2(B)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B|\, d\mu \\
&\qquad \le C\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}} \|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}}.
\end{aligned}$$

よって Lemma 4 より $fg \in \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}$ すなわち

$$g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)).$$

また Lemma 4 の不等式により

$$\|fg\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_2}} \le C\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}} (\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}}).$$

すなわち

$$\|g\|_{Op} \le C(\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}}).$$

最後に

$$\begin{gathered}
\mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X), \\
C^{-1} \le (\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_2}})/(\|g\|_{\mathrm{bmo}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}) \le C
\end{gathered}$$

を示すことができるので Theorem 1 が証明される。

定理 2 の証明。$1/p_1 + 1/p_3 = 1$, $1/p_1 + 1/p_4 = 1/p_2$ とする。第 1 に (12) と同様にして

$$\begin{aligned}
PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) &\subset PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_3,p_3}(X)) \\
&\subset L_{\phi_2/\phi_1,p_3}(X).
\end{aligned}$$

第 2 に (13) と同様にして

$$\begin{aligned}
PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) &\subset PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2}(X)) \\
&\subset \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_3}(X).
\end{aligned}$$

第 3 に (14) と同様にして

$$PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) \supset \mathrm{bmo}_{\phi_3,p_2}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_4}(X).$$

最後に John-Nirenberg の不等式を用いて

$$\mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_3}(X) = \mathrm{bmo}_{\phi_3,p_2}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1,p_4}(X) = \mathrm{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X)$$

を示すことができる。

定理 3 の証明。Lemma 4 が $p_3 = \infty$ または $C^{-1} \le \phi_1/\phi_2 \le C$, すなわち $L_{\phi_2/\phi_1,p_3}(X) = L^\infty(X)$ に対しても成り立つことから, 定理 2 と同様にして証明できる。

定理 4 の証明。次の Proposition 他を用いる。

Proposition 1 $1 \le p_1, p_2 < \infty$ とする。ϕ_1 が *(1)〜(4)* を, ϕ_2 が *(1)* をそれぞれ満たすとき

$$X_0 = \left\{ x \in X : \int_r^1 \frac{\phi_2(x,t)}{t}\,dt \bigg/ \int_r^1 \frac{\phi_1(x,t)}{t}\,dt \to 0 \ (r \to 0) \right\}$$

とおくと $g \in PWM(\mathrm{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \mathrm{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))$ ならば $g(x) = 0$ $a.e.X_0$.

3 連続性

Theorem 5 ϕ は *(1)* を満たすとする。$x \in X$ において

$$\int_0^{d(x,y)} \frac{\phi(x,t)+\phi(y,t)}{t}\,dt \to 0 \quad as \quad d(x,y) \to 0 \tag{15}$$

ならば, 任意の $f \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ は $x \in X$ において連続である。逆に ϕ が *(1)〜(4)* を満たすとき (15) が成り立たなければ, $x \in X$ において不連続な $f \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ が存在する。

Theorem 6 ϕ が *(1)〜(5)* を満たすとき,

$$\int_0^{d(x,y)} \frac{\phi(x,t)}{t}\,dt \le C\phi(x, d(x,y)), \quad x, y \in X \tag{16}$$

は, $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X) = \Lambda_\phi(X)$ $(1 \le p < \infty)$ であるための必要十分条件である。

定理 5 の証明。[7] の Lemma 2.4 と Lemma 2.6 により

$$|f(x) - f(y)| \le C \int_0^{d(x,y)} \frac{\phi(x,t)+\phi(y,t)}{t}\,dt \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}} \tag{17}$$

がいえる。後半は, $a_n \to a$, $d(a, a_{n+1}) \le d(a, a_n)/(2K_1)$ であるような点列に対して,

$$f_n(x) = \max\left(0, \int_{d(a_n,x)}^{d(a_n,a)/(9K_1^4)} \frac{\phi(a_n,t)}{t}\,dt\right)$$

とおくと, $f=\sum f_n \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ であり, $\operatorname{supp} f_n \cap \operatorname{supp} f_{n+1} = \emptyset$ かつ

$$f(x) \geq C \int_{9K_1^4 d(a_n,x)}^{d(a_n,a)} \frac{\phi(a_n,t)}{t}\,dt \quad \text{for } x \in B(a_n, d(a,a_n)/(9K_1^4))$$

となることからわかる。

定理 6 の証明。十分性。$f \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ ならば, (16) と (17) により

$$|f(x)-f(y)| \leq C(\phi(x,d(x,y))+\phi(y,d(y,x)))\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}}.$$

ゆえに

$$\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X) \subset \Lambda_\phi(X), \qquad \|f\|_{\Lambda_\phi} \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}}.$$

逆に $f \in \Lambda_\phi(X)$ ならば, $x,y \in B(z,r)$ に対して $|f(x)-f(y)| \leq C\phi(z,r)\|f\|_{\Lambda_\phi}$ だから

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f(x)-f_{B(z,r)}|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{\mu(B(z,r))}\int_{B(z,r)} \left(\frac{1}{\mu(B(z,r))}\int_{B(z,r)} |f(x)-f(y)|\,d\mu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\quad \leq C\phi(z,r)\|f\|_{\Lambda_\phi}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\Lambda_\phi(X) \subset \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X), \qquad \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}} \leq C\|f\|_{\Lambda_\phi}.$$

必要性。Lemma 1 より

$$f_a(x) = \int_{d(a,x)}^{1} \frac{\phi(a,t)}{t}\,dt \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X) = \Lambda_\phi(X)$$

だから, $d(a,y) \leq d(a,x)$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_{d(a,y)}^{d(a,x)} \frac{\phi(a,t)}{t}\,dt &= |f_a(x)-f_a(y)| \\
&\leq C(\phi(x,d(x,y))+d(y,d(y,x))) \leq C\phi(y,d(y,x)).
\end{aligned}$$

特に $d(a,y) \leq d(x,y)/(2K_1)$ のとき

$$\int_{d(a,y)}^{d(a,x)} \frac{\phi(a,t)}{t}\,dt \leq C\phi(a,d(a,x)).$$

よって (16) を得る。

References

[1] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 569–645.

[2] S. Janson, *On functions with conditions on the mean oscillation*, Ark. för Mat. **14** (1976), 189–196.

[3] R. A. Macías and C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), 257–270.

[4] E. Nakai, *On the restriction of functions of bounded mean oscillation to the lower dimensional space*, Arch. Math., **43**, (1984), 519–529.

[5] E. Nakai, *Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation*, Studia Math., **105**, (1993), 105–119.

[6] E. Nakai and K. Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 207–218.

[7] E. Nakai and K. Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation on spaces of homogeneous type*, preprint.